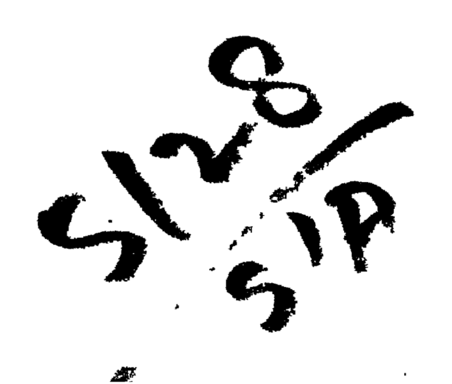


رسالة

فى

مساحة المجسم المكافى

للشيخ ابى سهل ويجن بن رستم القوهى

الموجود فى سنة ثلاثمائـة وثمانين من الهجـرة



الطبعة الاولى

بمطبعة جمعية دائرة المعارف العثمانية

حيدرآباد الدكن

صانها الله تعالى عن جميع البلايا والفتن

سنة ١٣٦٧ هـ / ١٩٤٧ م

تعداد الطبع ٥٠٠ / ١٣٥٧ ف

مساحة المجسم المكافى

بسم الله الرحمن الرحيم

لما كان العلم بمساحة الاجسام والاشكال والمقادير بنسبة بعضها الى بعض قبل العلم بمعرفة مراكز اثقالها لأنه المقدمة لها اذ لا يجوز وجود مراكز الاثقال الا بعد العلم بمساحتها ، فلهذا لما استقصينا النظر فى علم المساحة وفرغنا منه كالذى فى كتاب ارشميدس فى الكرة والاسطوانة وغير ذلك من الكتب .

فبدأنا بتأليف كتاب مراكز الاثقال واستقصينا النظر فيه غاية الاستقصاء حتى وجدنا مراكز اثقال عدته اشكال لم يجدها احد من القدماء المبرزين فى هذا العلم فضلا من دونهم من المتأخرين ولا سمعنا بذكر وجودها .

وهو ايضا مثل وجود مركز ثقل قطعة من كرة او مجسم قطع ناقص او قطع زائد الذى لم يكن موجودا الى وقتنا هذا فلما وجدنا ذلك طمعنا فى ان نجد مراكز اثقال اشكال اخر لم توجد اثقالها فيما قبل كمركز ثقل المجسم المكافى ولم يكن بد فى وجود مركز ثقله من معرفة مساحته اولا كما قلنا آنفا .

ولم يكن كتاب موجود فى مساحة المجسم المكافى إلاما ألفه ابو الحسن ثابت بن قرة وهو موجود مع اكثر اصحابنا لكنه كبير الحجم كثير الاشكال عدديا وخطوطيا وغيرهما تبلغ اشكاله الى قريب من اربعين شكلا وكلها مقدمات لشكل واحد هو معرفة مساحة المجسم المكافى •

ولما نظرنا فيه كان كتاب ارشميدس فى الكرة والاسطوانة مع صعوبته ومع ان فيه (١) كثيرة من المساحة اسهل من قراءة ذلك الكتاب وهو عرض واحد اعنى مساحة المجسم المكافى •

فلهذا ما وقفنا على شيء منه بعد رغبتنا فيه وظننا ان حال كل راغب فى قراءته كحالنا فيه من الوقت الذى ألفه ثابت الى وقتنا هذا اعنى انه لم يقف عليه احد كما لم تقف نحن عليه فلاجل ذلك حددنا النظر فى استخراج مساحة هذا الشكل ابتداءا ووجدنا مساحته بطريق مستغنية عن تلك المقدمات كلها وغير محتاجة الى شيء منها •

وكل من نظر فى هذا وكان من اصحابنا علم ان الامر كما قلنا ولولا ان تأليف كتاب مراكز الاثقال اضطرنا الى معرفة مساحة هذا الشكل الذى استخرجه ثابت بطريقه اولو كنا وقفنا عليه من كتابه واشتغلنا باستخراج شيء قد استخرجه غيرنا بأى وجه كان ولا تكلمنا فى طريق استخراج من تقدمنا طويلا كان او قصيرا سهلا كان اوصعبا مستغنيا عن المقدمات اومحتاجا اليها لأن ذلك

(١) هنا خرم فى الاصل ولعله صعوبة

ليس

ليس من عادتنا لا سيما ومسالك هذه العلوم كثيرة واسعة •

فنبتدىء الآن و نقول اذا دار قطع مكاف مع السطح المتوازى الاضلاع الذى يحيط به قطر ذلك القطع ونصف قاعدته ومع الخطوط الترتيب لذلك القطر ومع خطوط ذلك القطر حتى تعينه الادارة الى حيث بدأت منه فان المجسم الذى يحدث من ادارة سطح ذلك القطع هو المجسم المكافى والمجسم الذى يحدث به قطر القطع ونصف قاعدته هو الاسطوانة للجسم المكافى وفى ذلك القطر هو ايضا قطر المجسم المكافى والسطوح التى تحدث من ادارة خطوط الترتيب نسميها سطوح الترتيب للمجسم المكافى والمجسمات التى تحدث فيما بين سطوح الترتيب نسميها مدورات المجسم المكافى وما كان منها حادثا من السطح المتوازى الاضلاع الذى يقع بعضه خارجا من القطع ويكون زاوية من زواياه على محيطة نسميه المدور الذى على المجسم المكافى •

ونسمى المدورين اللذين احدهما واقع فى المجسم المكافى والآخر واقع عليه نظيرين اذا كان الذى وقع فيه منفصلا من الذى وقع عليه اعنى بذلك ان يشتركا فى ارتفاع واحد وكل مجسم يحدث من ادارة احد السطوح التى على ذلك القطع حول ذلك القطر اى سطح كان نسميه مجسم ذلك السطح اوالمجسم الكائن من ذلك السطح شبيهها كان بالطوق اوبالاسطوانة اوبغيرهما •

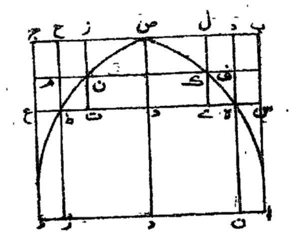
كل اسطوانة مجسم مكاف فان نصفها اصغر من جميع المدورات الحادثات على المجسم المكافى كم كانت واعظم من جميع المدورات الحادثات فيه كم كانت •

مثال ذلك ان اسطوانة المجسم المكافى ـ اب ج د ـ والمجسم المكافى ـ اش د ـ والمدورات التى عليه ـ اس ع د ه ـ ه ف ص ط ك ل م ز ـ والمدورات التى فيه ـ ف ه ط ز ـ ف ك ن ت ـ فاقول أن نصف اسطوانة ـ اب ج د ـ اصغر من جميع مدورات ـ اس ع د ه ف ص ط ـ ك ل م ن ـ التى على المجسم المكافى ومن جميع امثالها كم كانت واعظم من جميع مدورات ـ ف ه ط ز ـ ف ك ن ت ـ التى فيه ومن جميع امثالها كم كانت •

برهان ذلك ان كل واحد من خطى ـ او ـ ه د ـ من خطوط الترتيب لقطر ـ س د و ـ فنسبة خط ـ و ش ـ الى ـ ش د كنسبة مربع خط ـ او ـ الى مربع خط ـ ه د ـ وذلك لأن قطع اش د ـ قطع مكاف ونسبة مربع ـ اد ـ الى مربع خط ـ ه د ـ هى كنسبة مربع خط ـ اد ـ الى مربع خط ـ ه ط ـ ولكن نسبة مربع خط ـ اد ـ الى مربع خط ـ ه ط ـ كنسبة الدائرة التى قطرها خط ـ اد ـ الى الدائرة التى قطرها خط ـ ه ط ـ فنسبة الدائرة التى قطرها ـ اد ـ الى الدائرة التى قطرها ـ ه ط ـ كنسبة خط و ـ ش ـ الى خط ـ ش د ـ فضرب خط ـ ف ش ـ فى

الدائرة التى قطرها ـ ه ط ـ مساو لضرب خط ـ ش د ـ فى الدائرة التى قطرها ـ ا د ـ ولكن بضرب خط ـ و ش ـ فى الدائرة التى قطرها ـ ه ط ـ مساو لاسطوانة ـ ف ز ح ز ـ التى حدثت من ادارة سطح ـ ز ف و س ـ المتوازى الاضلاع حول قطر ـ س وكان خط الترتيب على القدر على الزاوية القائمة او على زاوية غير قائمة فكأنه قدر احد من احد رأسى الاسطوانة مخروط ما وندير بعضه على الرأس الآخر وكذلك ضرب خط ـ ش د ـ فى الدائرة التى قطرها ـ ا د ـ مساو لاسطوانة ـ س ح ع ـ التى حدثت من ادارة سطح ـ س ش د ـ المتوازى الاضلاع فاسطوانة ـ ف د ح ز مساوية لاسطوانة ـ س ح م ع ـ فاذا القينا اسطوانة ـ ه ز ح ط المشتركة بقى المجسم الذى يحدث من ادارة احد سطحى ـ س ب ز ه ط ح م ع ـ اصغر من سدور ـ ا س ع د ـ فاذا ركبنا كان مجموع هذا المجسم وهذا المدور اصغر من ضعف مدور ـ ا س ع د .

ش ـــ ١



ولكن المجسم والمدور جميعها فضل اسطوانة ـ ا ب ج د على اسطوانة ـ ه ز ح ط ـ ففضل اسطوانة ـ ا ب ج د ـ على اسطوانة ـ ه ز ح ط ـ اصغر من ضعف مدور ـ ا س ع د ـ الذى المجسم المكافى ٠

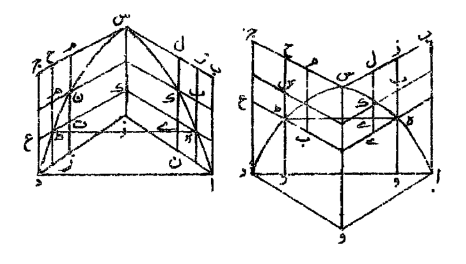
وكذلك فضل اسطوانة ـ ه ز ح ط ـ على اسطوانة ـ ك ل م ن ـ اصغر من ضعف مدور ـ ف ص ط ـ التى عليه وكذلك جميع الاساطين والمدورات الحادثة عليه حتى تنتهى الى البقية تبقى من اجزاء اسطوانة ـ ا ب ج د ـ المفروضة ٠

ولتكن تلك البقية مجسم ـ ك ل م ن ـ المكافى سوى مجسم ك ل م ن ـ وان جعلنا مجسم ـ ك ل م ن ـ مشتركا تكون اسطوانة ا ب ج د ـ اصغر من ضعف جميع المدورات التى على المجسم المكافى كم كانت فالنصف منها اصغر من جميع المدورات التى عليه كم كانت ٠

وايضا لأن المجسم الذى يدور على سطح ـ ا ب ز و ـ ز ج ح د ـ اعظم من المجسم الذى يدور على سطحى ـ س ل س ـ ط ج ح وهذا المجسم مساو لمدور ـ ف ه ط ز ـ كما بينا قبل فيكون المجسم الذى يدور على سطحى ـ ا ب ز و ـ ز ج ح د ـ اعظم من مدور ف ه ط ز ـ واذا ركبنا كانا جميعا اعظم من ضعف يدور ـ ف ه ط ز ولكن الجميع هو فضل اسطوانة ـ ل ش د ـ على اسطوانة ـ ه ز ح ط ـ ففضل اسطوانة ـ ا ب ج د ـ على اسطوانة ـ ه ز ح ط ـ اعظم

من ضعف مدور ـ ف ه ط ز ـ وكذلك فضل اسطوانة ـ ه ز ح ط على مجسم ك ل م ن ـ اعظم من ضعف مدور ـ ب ك ن ت ـ كما بينا •
وكذلك سائر الاساطين والمدورات التى فى المجسم المكافى حتى ينتهى الى آخر ما ينبغى من الاسطوانة المفروضة •
وليكن ذلك مجسم ـ ك ل م ن ـ ففضل اسطوانة ـ ا ب ج د ـ على مجسم ـ ك ل م ن ـ اعظم من ضعف المدورات التى فى المجسم المكافى كلها كم كانت •
وان زدنا مجسم ـ ك ل م ن ـ على فضل اسطوانة ـ ا ب ج د• عليه يكون جميع اسطوانة ـ ا ب ج د ـ اعظم كثيرا من ضعف المدورات التى فى المجسم المكافى كلها كم كانت فالنصف من اسطوانة ا ب ج د ـ اعظم من جميع المدورات التى فى المجسم المكافى كم كانت واصغر من جميع المدورات التى عليه كم كانت، وذلك ما اردنا ان نبين •

ش ـــ ٢



اذا قسم احد المدورات التي فيما بين سطحين من سطوح [illegible] الترتيب في مجسم مكافى بنصفين بسطح آخر من سطوح الترتيب حتى تحدث من قسمه مدورات على المجسم المكافى ومدوران نظيران لهما فيه فان فضلا المدورين الحادثين على نظيرهما الحادثين فيه نصف فضل المدور الاول الذى كان عليه نظيره الذى كان فيه قبل القسمة •

مثال ذلك ان مدورا من المدورات التي على مجسم ـ ا ب ج د ـ المكافى حدوثه عن ادارة سطح ـ ا د ه ج ـ ونظيره من المدورات التي فيه حدوثه عن ادارة سطح ـ ا د ز ح ـ [illegible] خط ـ ط ك ل م ـ قاسما لخطى ـ ا د ـ ه ج ـ والخطوط التي تقع بينهما على موازاة لهما بنصفين نصفين وجعل خط ـ ب ل س موازيا لقطر ـ ا ب •

فاقول ان فضل مدورى ـ ط د س ل ـ ا ط م ح ـ على مدورى ـ ط د ز ل ـ ا ط ل ن ـ النظرين لهما اعنى المجسمين اللذين يكونان من سطحى ـ ك ز س ل ـ ب ل م ج ـ نصف فضل مدورة ا د ه ج ـ على مدور ـ ا د ز ح ـ النظير له اعنى المجسم الذى يكون من سطح ـ ح ز ه ج •

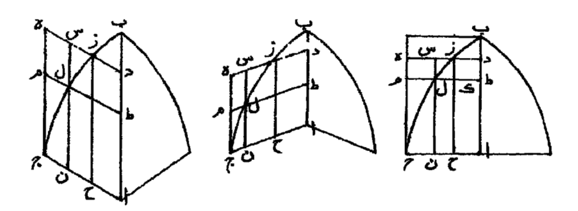
برهان ذلك ان سطح ـ ح ز س ن ـ متوازى الاضلاع وقد قسم ـ ز ح ـ بنصفين بخط ـ ك ل ـ الموازى لخطى ـ ز س ـ ح ن ـ يكون سطح ـ ح ك ل ن ـ مثل ـ ك ز س ل ـ فسطح ك ز ـ س ل ـ نصف سطح ـ ح ز س ن •

وبمثل

وبمثل ذلك تبين ان سطح ـ ب ل م ح ـ نصف سطح ب س ـ ه ج ـ فمدورا سطح ـ ك ز س ل ـ ب ل م ج ـ جميعا اللذان هما مدوري ـ ط د س ل ـ اط م ح ـ على مدوري ـ ط د دي ـ اط ل ن ـ مساويان لنصف مدور سطح ـ ح ز ه ج ـ الذي هو فضل مدور ـ اد ه ج ـ على مدور ـ اد ز ح ـ وذلك ما اردنا •

كل مجسم مكاف مساو لنصف اسطوانة ، مثال ذلك ان المجسم المكافى ـ اب ج ـ ونصف اسطوانة مثل مجسم ـ د ـ فاقول ان مجسم ـ اب ج ـ مساو لمجسم ـ د ـ •

ش ـ ٣



برهان ذلك ان مجسم ـ ا ب ج ـ ان لم يكن مساويا لجسم د ـ فاما اعظم او اصغر منه فليكن اولا اعظم من جسم د ـ ان امكن ذلك وليكن فضل مجسم ـ ا ب ج ـ على جسم ـ د ـ جسم ـ ه ـ ونجعل على مجسم ـ ا ب ج ـ المكافى مدورات كم كانت ونفصل من كل واحد منها مدورا فيه ولتكن فضلات المدورات التى عليها على المدورات التى فيه هى المجسمات التى تكون من ادارة سطوح ز ح ط ج ـ ك ل م ح ـ ب ل س ل ـ ونقسم كل واحد من هذه المدورات بنصفين بسطوح الترتيب حتى ترجع فضلات المدورات الحادثات التى على المجسم المكافى على نظائرها من المدورات الحادثات فيه الى نصف الفضلات التى كانت قبل القسمة كما بينا فى الشكل الثانى .

وكذلك تقسم ابدا المدورات الحادثات بنصفين نصفين حتى تنتهى فضلات المدورات التى عن المجسم المكافى على نظائرها من المدورات التى فيه الى اصغر من جسمه فجسم ـ ه ـ اعظم من تلك الفضلات كلها .

فلتكن الفضلات هى المجسمات التى تكون على سطوح ع ح ـ ح ف ـ ف ل ـ ل ص ـ ص ب ـ فجسم ـ ه ـ اعظم من هذه المجسمات كلها فهو اذن اعظم كثيرا من المجسمات التى تكون على المثلثات التى فى المجسم المكافى لأنها بعض تلك الفضلات فان

جعلنا

جعلنا جسم ـ د ـ مشتركا يكون جسمى ـ هـ د ـ اعظم من مجسمات المثلثات كلها مع جسم ـ د ـ وليكن جسمى ـ د ـ ه ـ مساويين لجسم ـ ا ب ج ـ المكافى لما فرضنا فجسم ـ ا ب ج ـ المكافى اعظم من مجسم ـ د ـ مع المجسمات الكائنات من المثلثات التى فى المجسم المكافى •

فاذا الفينا المجسمات المشتركة الكائنة من المثلثات المشتركة تبقى المدورات التى فى مجسم ـ ا ل ج ـ المكافى كم كانت اعظم من جسم ـ د ـ وهذا لا يمكن لأنا قد بينا انها اصغر من جسم ـ د الذى هو مساو لنصف اسطوانة المجسم المكافى فليس المجسم المكافى باعظم من جسم ـ د •

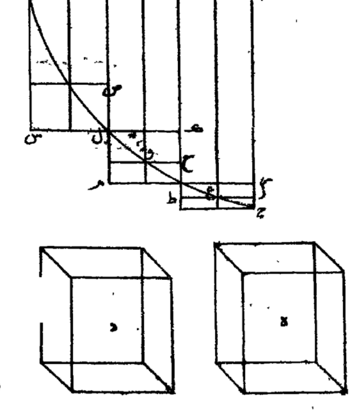
وان امكن ان يكون مجسم ـ ا ب ج ـ المكافى اصغر من جسم ـ د ـ فليكن الفضل بينهما جسم ـ ه ـ حتى يكون مجسم ا ل ج ـ المكافى مساويا لجسم ـ د ـ ونقسم ايضا المدورات التى على مجسم ـ ا ل ج ـ بنصفين نصفين كما قلنا حتى تنتهى الفضلات الى اصغر من جسم ـ ه ـ كما بينا فمجسمات المثلثات التى على المجسم المكافى يكون اصغر كثيرا من جسم ـ ه ـ لأنها بعض تلك الفضلات •

وان جعلنا مجسم ـ ا د ـ المكافى مشتركا تكون مجسمات المثلثات على المجسم المكافى مع المجسم المكافى اصغر من جسم

ه ـ مع مجسم ـ ال ج ـ المكافى وليكن جسم ـ ه ـ مع المجسم المكافى مساويان لجسم ـ د ـ كما فرضنا ومجسمات المثلثات التى على المجسم المكافى مع المجسم المكافى هى المدورات التى على المجسم المكافى فالمدورات التى على المجسم المكافى اصغر من جسم ـ ه وهذا محال •

لأنا قد بينا انها اعظم من نصف اسطوانة مجسم ـ ال ج المكافى الذى هو مساو لمجسم ـ د ـ فجسم ـ ال ج ـ المكافى ليس باصغر من مجسم ـ د ـ وقد بينا انه ليس باعظم منه فجسم ال ج ـ المكافى مساو لمجسم ـ د ـ الذى هو نصف اسطوانة المجسم المكافى فكل مجسم مكاف هو نصف الاسطوانة التى لذلك المجسم المكافى وذلك ما اردنا •

ش ـ ٤



وقد

وقد استعملنا فى هذا الشكل انه اذا كان مقداران مختلفان وفضل من اعظمهما نصفه ومن الباقى نصفه وفعل ذلك دائما فانه ينتهى الى مقدار ما اصغر من المقدار الاصغر فالمقدار الاعظم هاهنا هو مجموع فضلات المدورات التى هى الجسم المكافى على المدورات التى فيه وهى التى قسمت بنصفين نصفين والمقدار الاصغر هو جسم — ه —.

وقد بين اقليدس انه اذا فصل من الاعظم من نصفه ومما يبقى اكثر من نصفه وفعل ذلك دائما فانه ينتهى الى مقدار اصغر من الاصغر والبرهان على ذلك واحد.

واذا كان الامر على ما وصفنا فكان الاولى ان نقول اذا كان مقداران مختلفان وفصل من اعظمهما ما ليس باقل من نصفه ومما يبقى ما ليس باقل من نصفه وفعل ذلك دائما فانه ينتهى الى مقدار اصغر من المقدار الاصغر حتى يكون البرهان عاما — والله الموفق

تمت الرسالة والحمد لله وحده وصلواته على
نبيه محمد وآله الطاهرين — فرغت
من تعليقها بالموصل المحروسة
فى صفر من شهور
سنة ٦٣٢